# Seiberg-Witten理論が教えてくれること。

お茶の水女子大学・理学部　小野 薫

## §0. 序

昨年の暮、4次元トポロジーに重要なゲージ理論に新展開があった。それ以来、日本国内でも、何人かの人達が、各地で紹介されたので、既に概要を御存知の方々も多いかと思う。私自身は、ゲージ理論の専門家ではないが、今回身近な所でSeiberg-Witten理論の威力を目のあたりにした。また、この話では、Dirac作用素が、(表に現れる)登場人物である。個人的には、Dirac作用素というものの周辺に関心を持っていたので、今後多くの人が、Dirac作用素周辺にも関心を持ってくれるかもしれないという期待もある。

この紹介文では、Seiberg-Witten理論の粗筋と応用例について述べるが、筆者の力量不足の為、Seiberg, Wittenによる物理的推論については全く触れる事ができない。お許し戴きたい。

## §1. Spin geometry

この節では、向き付けられた多様体上の$spin^{(c)}$構造，Dirac作用素について述べる。多様体が与えられた時、向きが付けられるかどうかを第1の問とすると、その次のステップが、spinであるかどうかという問となる。言い換えると、「向きが付く」という事は、「閉曲線上に接束を制限したとき自明束となる」事だが、「spinである」とは、「実2次元サイクルに、接束を制限したとき、安定的自明束となる」事といえる。(ここで安定的自明とは、いくつか自明束を直和すると、自明束となること。)

特殊直交群$SO(n)$の二重被覆群を$Spin(n)$と書く。(これは$n \geq 3$のとき単連結となる。)　$n$次元有向多様体$M$の接束$TM$の変換関数

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow SO(n)$$

が、Spin(m)-値変換関数(1-コサイクル)に持ち上がるとき、その持ち上げ方をspin構造という。

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \to Spin(m) \to SO(m) \to 1$$

に対応して、

$$(*) \qquad \to H^1(M, C^\infty(\cdot, Spin(m))) \to H^1(M, C^\infty(\cdot, SO(m))) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbb{Z}/2)$$

なる完全系列ができる。接束は、$H^1(M, C^\infty(\cdot, SO(m)))$の元が対応している。それが$H^1(M, C^\infty(\cdot, Spin(m)))$の元に持ち上がる事は、連結準同型$\delta$による像(これは第2 Stiefel-Whitney類と呼ばれ、$w_2$と書かれる)が0となる事と同値となる。同伴する主束の言葉で言うと、spin構造とは、接枠束$P_{SO}$のfibrewise double coverである主Spin(m)-束を取る事と解釈される。

$$(**) \qquad \begin{tikzcd} Spin(m) \arrow[r] \arrow[d] & P_{spin} \arrow[d] \\ SO(m) \arrow[r] & P_{SO} \arrow[d] \\ & M \end{tikzcd}$$

M上にどの位Spin構造があるかは[#)]、上の様なものの分類で判り、$H^1(M; \mathbb{Z}/2)$が、{M上のspin構造}にsimply transitiveに作用している事が判る。(上の完全系列(*)に現れる$H^1(M, C^\infty(\cdot, Spin(m)))$は単に、主Spin(m)-束を分類しているのであり、(**)にあるfibrewise double coverという情報が入っていないので、この事実は(*)から得られたものでない事を注意しておく。)

Spin(m)はSO(m)の$\mathbb{Z}/2$-拡大であったが、次に$S^1$-拡大$Spin^c(m)$を導入する。これを考える理由として後にみるように、概複素構造があれば、(spin構造が入るとは限らないが)$spin^c$-構造が入る事が挙げられる。$Spin^c(m)$は、$Spin(m) \times S^1$を$\pm 1$の対角作用で割ったもので

$$(***) \qquad 0 \to S^1 \to Spin^c(m) \to SO(m) \to 1$$

$$(****) \qquad 0 \to Spin(m) \to Spin^c(m) \xrightarrow{\xi} S^1 \to 1$$

$$[A, z] \mapsto z^2$$

なる2つの完全系列がある。$spin^c$構造は、上のspin構造の説明と

#) M上に1つはspin構造があると仮定している。

同様に、変換関数の $Spin^c(m)$ への持ち上げと思ってもよいし、主束の言葉で、$P_{SO}$ の fibrewise $S^1$-束 $P_{Spin^c}$（しかも主 $Spin^c(m)$ 束）

$$\begin{array}{ccc} Spin^c(m) & \longrightarrow & P_{Spin^c} \\ \downarrow & & \downarrow \\ SO(m) & \longrightarrow & P_{SO} \\ & & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

の事としてもよい。また、$H^2(M, C^\infty(\cdot, S^1)) \cong H^3(M;\mathbb{Z})$ に注意すると、$Spin^c$ 構造の存在の障害は、$H^3(M:\mathbb{Z})$ の元で与えられるが、実はこれは、前出の $w_2$ の Bockstein 準同型（$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 \to 0$ による）

$$H^2(M:\mathbb{Z}) \underset{\mathrm{mod}\,2}{\rightarrow} H^2(M:\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\delta} H^3(M:\mathbb{Z})$$

での $w_2$ の像で、従って、$spin^c$ 構造が存在する為の必要十分条件は、$w_2$ が $H^2(M:\mathbb{Z}) \to H^2(M:\mathbb{Z}/2)$ の像に含まれる事となる。詳細は省略するが、この事実と、Wu の公式、普遍係数定理を合わせると、4次元有向多様体は、$Spin^c$ 構造を持つ事が判る。

さて、どれ位 $spin^c$-構造があるか[*)]というと、前と同様に、$H^2(M:\mathbb{Z})$ が｛$M$ 上の $spin^c$-構造｝に simply transitive に作用する。

$M$ が概複素構造を持つとしよう。接束の構造群は $U(n)$ としてよい。$U(n) \hookrightarrow SO(m=2n)$ による $Spin(m)$ の引き戻しを、$\widetilde{U}(n)$ と書く。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U}(n) & \xrightarrow{\tilde{\imath}} & Spin(m) \\ \pi\downarrow & & \downarrow \\ U(n) & \xrightarrow{\imath} & SO(m) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{U}(n) & \xrightarrow{\tilde{\imath} \times \sqrt{\det\circ\pi}} & Spin(m) \times S^1 \\ \pi\downarrow & & \downarrow \\ U(n) & \longleftrightarrow & SO(m) \end{array}$$

右上図の $\tilde{\imath} \times \sqrt{\det\circ\pi}$ は、$U(n) \longrightarrow Spin^c(m)$ を定める。（ここで $\det: U(n) \to S^1$ は、基本群の同型を導くので、$\widetilde{U}(n)$上、det の平方根がとれる事を用いた。）従って、接 $U(n)$ 枠束に上の準同型で、同伴 $Spin^c(m)$-束を作ると、これが $spin^c$-構造となる。以後概複素多様体に対しては、これを"標準的" $spin^c$-構造と呼ぶ。（蛇足であるが、概複素多様体が spin 構造を持つとしても、一般には、"標準的" $spin^c$-構造と整合していない。"$\sqrt{K_M^*}$" のずれがある。）

*) $M$ 上に1つは $spin^c$-構造があると仮定している

Dirac作用素を考えるには、主$Spin^{(c)}$-束に接続を入れないといけない。Mに Riemann計量が定まると、$P_{SO}$上には Levi-Civita 接続が定まる。spin構造の場合は、$P_{spin}$は$P_{SO}$の double cover なので接続型式の引き戻しで、$P_{spin}$に接続が定まるが、$spin^c$構造の場合は$P_{spin^c}$は$P_{SO}$上の$S^1$-束なので、この"1次元分"の不定性が残る。これを定める為に、$spin^c$-構造に同伴する$S^1$-束 $L = P_{spin^c} \times_{\xi} S^1$ ($\xi$は完全系列(****)に現れたもの)の接続を1つ定める。そして、それを$P_{spin^c} \to L$により引き戻す。こうして残った1次元分が決まる。つまり、この場合、M上の Riemann計量のみでなく、L上の接続を選ぶ必要がある。(後では、L上の接続が"未知関数"の1つとして現れる。)

$Spin^c(m)$は、$\mathbb{R}^m$から作られる Clifford 代数の複素化$Cl^c(\mathbb{R}^m)$に含まれ、従って$Cl^c(\mathbb{R}^m)$の表現から$Spin^c(m)$の表現が得られる。特に$m = 2n$(偶数)の時、$Cl^c(\mathbb{R}^m) \cong M_{2^n}(\mathbb{C})$の既約表現の、$Spin^c(m)$への制限は、$(\rho^{\pm}, \Delta^{\pm})$と2つの表現に分解する。これらの表現を用いて、$P_{spin^c}$に同伴したベクトル束 $S^{\pm} := P_{spin^c} \times_{\rho^{\pm}} \Delta^{\pm}$ が構成される。例えば、(概)複素多様体の"標準的"$spin^c$構造から$S^{\pm}$を作ると、$S^+_{can} \cong \Lambda^{0,\mathrm{even}} T^*M$, $S^-_{can} \cong \Lambda^{0,\mathrm{odd}} T^*M$ となる。Dirac作用素とは、上で Kähler の場合、Dolbeault作用素$\bar\partial$の言葉でいうと、$\bar\partial + \bar\partial^*$に当るもので、正確な定義は以下の通り。

この頁の上に書いた処方で、$P_{spin^c}$に接続を入れ、これによる共変微分を $\nabla : \Gamma(S^{\pm}) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes S^{\pm})$ と書く。更に、Riemann計量を用い、$T^*M$と$TM$を同一視し、Clifford積 $TM \otimes S^{\pm} \longrightarrow S^{\mp}$ を考える。($\Delta^+ \oplus \Delta^-$は$Cl^c(\mathbb{R}^m)$の表現であった)これらの合成として、

$$D^{\pm}: \Gamma(S^{\pm}) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes S^{\pm}) \cong \Gamma(TM \otimes S^{\pm}) \longrightarrow \Gamma(S^{\mp})$$

を得る。これを Dirac 作用素という。$D^{\pm}$は楕円型 1 階線型微分作用素で、$D^{\pm}$は互いに他の随伴作用素である。この作用素の重要性は、幾何構造に付随した楕円型微分作用素の親玉であるという事に理由があると思われ、Atiyah-Singer の指数定理により、幾何的

情報と位相的情報とが結びついている事に依る。(60〜70年代は、こうした線型の話があったが、今のゲージ理論に代表される流れは、その非線型版といえる。) 代表的応用例をいくつか挙げよう.

i) 正の scalar 曲率を持つ計量への障害 (Lichnerowicz)

compact spin 多様体が正の scalar 曲率をもつ計量を許せば、$\hat{A}$-種数は消える。 (指数定理により、spin Dirac 作用素 $D^+$ の指数 $= \hat{A}$-種数)

ii) 非自明な $S^1$-作用への障害 (Atiyah - Hirzebruch)

compact spin 多様体が自明でない $S^1$ 作用を許せば $\hat{A}$ 種数は消える。

iii) Rochlin の定理の別証 (Atiyah - Hirzebruch)

[Rochlin : 4次元 compact spin 多様体の signature は 16 で割りきれる.]

このうち ii) は、同変K理論の局所化定理に依るもので、以前 Witten が発見した elliptic genus の話は、ii) の拡張といえ、その中で (また少し前に Ochanine により) iii) の $8k+4$ 次元への一般化がなされている。iii) は $D^+$ が複素線型のみならず四元数体上線型で、従って指数が偶数となる事に依る。この考え方の現代版が、今回の Seiberg-Witten 理論での古田幹雄氏の見事な仕事といえる。[F] i) は Bochner-Weitzenböck の公式と呼ばれるものにより示されるが、この (種の) 公式が Seiberg-Witten の moduli 空間の compact 性を保障している。

< Spin Dirac 作用素の Bochner-Weitzenböck の公式 >

$$D^*D = \nabla^*\nabla + \frac{Sc}{4}$$

ここで、$D^*, \nabla^*$ は $D, \nabla$ の随伴作用素, $Sc$ は scalar 曲率を表す。これを認めると、$Sc$ が正のとき、$\operatorname{Ker} D = 0$ が次の様に判る。 $s \in \operatorname{Ker} D$ をとる。

$$\begin{aligned} 0 = \langle D^*Ds, s\rangle &= \langle \nabla^*\nabla s, s\rangle + \langle \tfrac{Sc}{4}s, s\rangle \\ &= \underset{\substack{\vee\!\shortmid \\ 0}}{\|\nabla s\|^2} + \underbrace{\langle \tfrac{Sc}{4}s, s\rangle}_{\substack{\vee\!\shortmid \\ 0}} \end{aligned}$$

よって、$s = 0$。即、$\operatorname{Ker} D^+ = 0$. $\operatorname{Coker} D^+ \cong \operatorname{Ker} D^- = 0$. □

(後には、各点ノルムによる議論を紹介する)

以上で前置きを終え、本論に入る。

## §2. Seiberg-Witten の方程式とその解空間

$M$ を4次元閉有向多様体とする。(閉 = compact without boundary)
$M$ 上の Riemann 計量 $g$ と、spin$^c$ 構造 $\mathfrak{L}$ とを取っておく。(§1で触れた様に、spin$^c$ 構造の存在は判っている。また、文献によっては、$\mathfrak{L}$ ではなく、その同伴 $S^1$ 束(の Euler 類)のみを記している事もあるが、こちらの方が正確である。) $\mathfrak{L}$ が決まると、同伴 $S^1$ 束 $L$ が定まる。(§1) この時、Seiberg-Witten 方程式とは、$\phi \in \Gamma(S^+)$, $A \in \mathcal{A}(L) = \{L$ 上の接続全体$\}$ に対する次のものである。

$$(SW) \quad \begin{cases} D_A \phi = 0 \\ F_A^+ = \sigma(\phi, \phi) \end{cases}$$

ここで、$D_A$ は、Riemann 計量 $g$ の Levi Civita 接続と、$A$ から決まる Dirac 作用素、$F_A^+$ は、$L$ 上の接続 $A$ の自己双対成分(即、$g$ に関する Hodge $*$-作用素に関し、$\Lambda^2 T^*M$ を $\pm 1$ 固有空間 $\Lambda^2_\pm$ に直和分解した時の $\Lambda^2_+$ 成分) そして、$\sigma(\phi, \phi)$ は以下で定まる"$\phi$ について2次の項"。

Clifford 積により、$\Lambda^2 T^*M \ (\cong \Lambda^2 TM) \longrightarrow End(S^+)$ が得られるが、$\Lambda^2_-$ は、この kernel となり、更に image を調べる事で、$\Lambda^2_+$ は、$\{S^+$ の traceless skew Hermitian endomorphisms$\}$ と同型となることが判る。従って、$\sqrt{-1}\,\Lambda^2_+ \xrightarrow{\sim} \{S^+$ の traceless Hermitian endomorphism$\}$ となる。ここで、$\psi \in S^+ \longmapsto \langle \psi, \phi \rangle \phi \in S^+$ なる endomorphism の traceless part をみると、$\psi \longmapsto \langle \psi, \phi \rangle \phi - \frac{1}{2} \langle \phi, \phi \rangle \psi$ となるが、これに対応する $\sqrt{-1}\,\Lambda^2_+$ の元を $\sigma(\phi, \phi)$ と書いた。実は $\sigma$ は"moment map"として解釈されるが、ここでは省略する。

方程式 $(SW)$ は、計量 $g$ に依存しているが、更に次の摂動も考えよう。$g$ に関する自己双対2型式 $\mu$ を取り、($\mu$ は純虚係数とする)

$$(SW)_\mu \quad \begin{cases} D_A \phi = 0 \\ F_A^+ = \sigma(\phi, \phi) + \mu \end{cases}$$

なる方程式を(摂動された) Seiberg-Witten 方程式と呼ぼう。以下で、これの有用性もお判り戴けると思う。方程式 $(SW)$ 或いは $(SW)_\mu$ には、"無限次元の対称性"があるので、解空間をこの作用で割って考

える。 $\mathcal{G} = C^\infty(M, S^1)$ は、$\Gamma(S^+) \times \mathcal{A}(L)$ に次の様に作用する。
$f \in \mathcal{G}$; $(\phi, A) \in \Gamma(S^+) \times \mathcal{A}(L) \longmapsto (f \cdot \phi, (f^2)^* A) \in \Gamma(S^+) \times \mathcal{A}(L)$.
ここで $g^* A$ とは、$g \in \mathcal{G}$ を $L$ のゲージ変換と思って接続 $A$ を $g$ で引き戻したものである。容易に判る様に、この作用は (SW) 或いは $(SW)_\mu$ の解空間を保つ。そこで、"moduli 空間" を

$$\mathcal{M}(\mathcal{L}, g) = \{ (SW) \text{ の解} \} / \mathcal{G}$$
$$\mathcal{M}(\mathcal{L}, g, \mu) = \{ (SW)_\mu \text{ の解} \} / \mathcal{G}$$

で定める。

また $M$ の1点 $p$ を選んで、$\mathcal{G}_0 = \{ f : M \to S^1 \mid f(p) = 1 \}$ とおき、

$$\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{L}, g) = \{ (SW) \text{ の解} \} / \mathcal{G}_0$$
$$\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{L}, g, \mu) = \{ (SW)_\mu \text{ の解} \} / \mathcal{G}_0$$

とおく。$\mathcal{G}/\mathcal{G}_0 \cong S^1$ であり、$\widetilde{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$ は $\{(\phi, A) \mid \phi = 0\}$ 以外では、$S^1$-束となる。$\phi = 0$ となる解 $(0, A)$ を、可約解と呼ぶ事にする。可約解 $(0, A)$ を考えると、(SW) では、$F_A^+ = 0$ (即ち $A$ は反自己双対接続)、$(SW)_\mu$ では、$F_A^+ = \mu$ を得る。Chern-Weil 理論に依れば、$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} F_A$ は、$L$ の第1 Chern 類 $c_1(L)$ を表し、従って、$H^2(M:\mathbb{Z}) \to H^2(M:\mathbb{R})$ の像 ($H^2(M:\mathbb{Z})_{\mathbb{R}}$ と書く) に入る。例えば、(SW) の時、$H^2(M:\mathbb{R})$ を $g$ に関する調和2型式の空間と同一視すると、反自己双対調和2型式の空間 $\mathcal{H}^2_-$ は $H^2(M:\mathbb{R})$ の線型部分空間で、余次元は $b_2^+ = \dim \mathcal{H}^2_+$ ($\mathcal{H}^2_+ = \{$自己双対調和2型式$\}$) である。$b_2^+ \geqq 1$ の時は、$g$ を一般の位置にあるとすれば、$H^2(M:\mathbb{Z})_{\mathbb{R}} \cap \mathcal{H}^2_- = \{0\}$ としてよい。従って、$c_1(L)_{\mathbb{R}} \neq 0$ の時、可約解は存在しないことになる。(但、$b_2^+ = 1$ の時は後の wall-crossing の問題と関り、後で注意が要る。)

$b_2^+ \geqq 1$ の時、$g$ を一般の位置にとると、$\widetilde{\mathcal{M}}(\mathcal{L}, g, \mu) \to \mathcal{M}(\mathcal{L}, g, \mu)$ は、$S^1$-束となるので、この Euler 類を $e$ と書く。$\mathcal{M}$ が有限次元有向閉多様体であれば、$e$ の巾を $\mathcal{M}$ の基本類で測る事で、数を得る。これが、Seiberg-Witten 不変量と呼ばれるものの大雑把な定義である。何故この様な数を考えるのかは、少し別の角度(といってもほとんど変らないが)からの次の説明を与えるのがよいかもしれない。

今の場合、$\mathcal{M}$ は $\{(\Gamma(S^+)\setminus\{0\})\times\mathcal{A}(L)\}/\mathcal{G}$ のサイクルとなるので $\{(\Gamma(S^+)\setminus\{0\})\times\mathcal{A}(L)\}/\mathcal{G}$ の然るべき次数のコホモロジー類の evaluation ができる。この大きな空間は $\mathcal{G}$ の分類空間で、その ホモトピー型は $\mathbb{C}P^\infty\times T^{b_1(M)}$ である事が判る。($T^{b_1(M)}$ は $b_1(M)$ 次元のトーラス)。前出の $e$ は $\mathbb{C}P^\infty$ の2次元コホモロジーの生成元に他ならない。

以上の事を実行するには、$\mathcal{M}$ が有限次元閉多様体となる事をみないといけない。有限次元多様体である事は、(SW) 或いは $(SW)_\mu$ が非線型楕円型方程式であれば、(Banach 空間の)陰関数の定理と、(Fredholm 写像についての) Sard の補題を用いて、一般の位置にある $(g,\mu)$ に対し、解空間が有限次元多様体となる事が判る。今の場合、少しの修正でこの議論ができる。修正が必要なのは、(SW), $(SW)_\mu$ が $\mathcal{G}$ という無限次元の群の対称性があるからで、それには所謂ゲージ固定をすればよい。このとき、接空間は、線型化方程式の解空間となるが、この次元は(線型化作用素が全射であることにより)線型化作用素の指数として計算できる。指数は、楕円型作用素の主表象にのみ依るが、これは今の場合、Dirac 作用素 $D^+:\Gamma(S^+)\to\Gamma(S^-)$ と、$\Omega^1\xrightarrow{d^*\oplus d^+}\Omega^0\oplus\Omega^2_+$ を並べたものの主表象と同じとなるので、このことから

$$d_{\mathcal{L}}=\dim\mathcal{M}=\frac{1}{4}\left(c_1(L)^2-2\,\mathrm{Euler}(M)-3\,\mathrm{Signature}(M)\right)$$

となる事が判る。

向きについては、$\mathcal{M}$ の接束が、$\mathcal{M}$ でパラメーターづけられた線型化作用素の族の指数(これは一般には形式的ベクトル束の差として $KO(\mathcal{M})$ の元であるが今は、全射である線型化作用素の族の指数を考えている)として解釈できる。$D^+$ は複素線型なので、こちらの kernel cokernel には自然な向きが入る。そこで片われの $\Omega^1\xrightarrow{d^*\oplus d^+}\Omega^0\oplus\Omega^2_+$ の指数で、1つ向きを決めてあげると、族の指数に向きがつけられる。即、$H^1(M;\mathbb{R})\oplus(H^0(M;\mathbb{R})\oplus H^2_+(M;\mathbb{R}))^*$ の向きを与えることで $\mathcal{M}$ に向きが定まる。以下1つ向きが選ばれているとして話を進める。

次に compact 性を示すアイディアを説明する。鍵となるのは、§1 の最後に触れた Bochner-Weitzenböck の公式であるが、ここでは、spin$^c$ Dirac 作用素なので、1つ項がつけ加わる。

＜spin$^c$ Dirac作用素の Bochner-Weitzenböck の公式＞

$$D_A^* D_A \phi = \nabla_A^* \nabla_A \phi + \frac{Sc}{4}\phi + \frac{1}{2} F_A \phi$$

前に述べた様に、反自己双対2型式は、Clifford積により $S^+$ に作用させると、0となるので、右辺第3項を $F_A = F_A^+ + F_A^-$ と分解すると、

$$\phi \in S^+ \longmapsto F_A^- \cdot \phi = 0 \in S^+$$

となり、$\phi \in S^+$ とすると、$F_A \phi = F_A^+ \cdot \phi$ である。

$(\phi, A)$ を (SW) の解とする。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &= \langle \nabla_A^* \nabla_A \phi, \phi \rangle - |\nabla_A \phi|^2 \\ &= \langle D_A^* \underbrace{D_A \phi}_{=0}, \phi \rangle - \frac{Sc}{4}|\phi|^2 - \frac{1}{2}\langle \underbrace{\sigma(\phi,\phi)\phi}_{=F_A^+ \phi}, \phi \rangle - |\nabla_A \phi|^2 \\ &\leqq -\frac{1}{4}(Sc + |\phi|^2)|\phi|^2\end{aligned}$$

$|\phi|^2$ が最大値をとる点では、$\Delta|\phi|^2 \geqq 0$ であり、その点では $Sc + |\phi|^2 \leqq 0$ となる。従って、$|\phi|$ は Scalar曲率により定まる定数による $C^0$-bound をもつ。このことから $F_A^+$ も、$C^0$-bound をもつ。また、$F_A = F_A^+ + F_A^-$ の de Rham 類は L のみで決まることを合せると、$F_A$ の $L^2$-norm が押えられる。以後こうした bound を方程式 (SW) に盛り込むことで、より高次の bound ができる。Rellichの補題と合せて compact 性が得られる。

今の議論から判る事を書いておく。まず Scalar曲率が正であるとすると、解 $(\phi, A)$ は可約解しかあり得ない。従って、$b_2^+ \geqq 1$ である時、一般の位置にある $(g, \mu)$ に対し、$(SW)_\mu$ は解をもたない事が判る。(消滅定理) また、(SW) が解をもつ様な spin$^c$ 構造は、高々有限個である事も同様の議論を基にして示される。

以上で、Seiberg-Witten 不変量を定義する準備が整った。M は、$b_2^+ \geqq 1$ (但. $b_2^+ = 1$ の時は後述の様に余分の注意あり) とし、$H^1(M) \oplus (H^0(M) \oplus H_+^2(M))^*$ に向きを与えておく。$\mathcal{L}$ を M 上の spin$^c$ 構造とし、この $\mathcal{L}$ に対し、$(SW)_\mu$ を考える。$(g, \mu)$ は、一般の位置

にあるものとすると、$\mathcal{M}(g,\mu)$は、$d_{\mathcal{L}}$次元有向閉多様体となり、$\widetilde{\mathcal{M}}(g,\mu)\to\mathcal{M}(g,\mu)$は、$S^1$-束となる。このEuler類を$e$とする。特に、$d_{\mathcal{L}}<0$のときは、$\mathcal{M}(g,\mu)=\phi$，$d_{\mathcal{L}}=0$のときは、有限個の点に±の符号がついているものとなる。そこで、$d_{\mathcal{L}}<0$又は$d_{\mathcal{L}}$が奇数のときは、$SW(\mathcal{L};g,\mu)=0$と定義し、$d_{\mathcal{L}}=0$の時は、$SW(\mathcal{L};g,\mu)=\mathcal{M}(g,\mu)$の点を符号つきで数えた数，$d_{\mathcal{L}}$が正の偶数の時は$SW(\mathcal{L};g,\mu)=\langle e^{d_{\mathcal{L}}/2},[\mathcal{M}(g,\mu)]\rangle$として、$SW(\mathcal{L};g,\mu)$を定義する。次に考えるのは、$SW(\mathcal{L};g,\mu)$が$(g,\mu)$に依るかどうかという問題である。

その為に、$(g_1,\mu_1),(g_2,\mu_2)$を一般の位置にある2つの対とし、これらを$(g_t,\mu_t)$ $(1\le t\le 2)$とつなぎ、

$$\mathcal{M}=\bigcup_{1\le t\le 2}\{t\}\times\mathcal{M}(g_t,\mu_t)$$

なる集合を考える。もしこれが、compact有向多様体である事が判れば、その境界として$t=1,2$のときの$\mathcal{M}(g_1,\mu_1)$, $\mathcal{M}(g_2,\mu_2)$が現れ、この事から$SW(\mathcal{L};g_1,\mu_1)=SW(\mathcal{L};g_2,\mu_2)$が導かれる。まず考えなくてはならないのは、$t=1,2$のときは可約解は現れなかったが、ある$t\in(1,2)$に対し、$(SW)_\mu$が$(g_t,\mu_t)$について可約解をもつかどうかである。$b_2^+\geqq 2$であれば、$\{(g_t,\mu_t)\mid 1\le t\le 2\}$を$(g_1,\mu_1)$と$(g_2,\mu_2)$をつなぐ道として一般の位置にあるとすると、全ての$t\in[1,2]$について可約解をもたないとして良い事が判る。$b_2^+=1$であると、

$$\int_M (c_1(L)-2\pi\sqrt{-1}\mu_t)\wedge\omega_{g_t}=0$$ （但 $\omega_{g_t}$は$g_t$についての自己双対調和2型式）

となる$(g_t,\mu_t)$は、可約解をもつ。

さて、可約解が現れないとすれば$\mathcal{M}$が多様体となるかという問題については、横断正則性定理のFredholm写像版（これもSmaleによる）を用いれば肯定的に答えられる。（即、$\{(g_t,\mu_t)\}$を道として一般の位置にあるようにとる。）

以上より$b_2^+\geqq 2$の時は、$(g,\mu)$のとり方に依らず$SW(\mathcal{L};g,\mu)$を単に$SW(\mathcal{L})$と書き、spin$^c$構造$\mathcal{L}$に関するSeiberg-Witten不変量と

呼ぶ。 $b_2^+ = 1$ の時は $(g, \mu)$ が、

$$\int_M (c_1(L) - 2\pi\sqrt{-1}\,\mu) \wedge \omega_g = 0$$

で定まる"壁"のどちら側にあるかにより、$SW(\mathcal{L}; g, \mu)$ は別々の値をとり得る。この値の差を記述するのが wall-crossing 公式と呼ばれるものである。$b_1 = 0$ の時は Kronheimer-Mrowka の論文にある様に、値の差は $\pm 1$ である。$b_1 \neq 0$ の時は、$b_1 = 0$ の議論を $\{$平坦 $U(1)$-接続$\}/\mathcal{G}$ でパラメトライズされた族について行なうとよい。 以下簡単の為 $b_2^+ \geqq 2$ とする。

spin$^c$ 構造 $\mathcal{L}$ が（少し雑な data でいうと $c_1(L)$ が）Seiberg-Witten 類であるとは、$SW(\mathcal{L}) \neq 0$ となる事と定義する。Witten によると、Seiberg-Witten 類と、Donaldson 理論での Kronheimer-Mrowka の基本類とが対応していると予想されている。また、Seiberg-Witten 類 $\mathcal{L}$ で $d_{\mathcal{L}} > 0$ なるものは知られていない様である。（Seiberg-Witten 類 $\mathcal{L}$ は $d_{\mathcal{L}} = 0$ を満たすかという問もあり、示されている多様体のクラスとして、symplectic 特に Kähler 4-多様体がある。ここでは $b_2^+ \geqq 2$ としていた事を改めて書いておく。）

## §3. Kähler 曲面の場合

複素構造に付随した"標準的な" spin$^c$-構造を思い出すと、それは

$$S^+_{can} \cong \Lambda^{0,0}(M) \oplus \Lambda^{0,2}(M), \quad S^-_{can} \cong \Lambda^{0,1}(M)$$

となるものであった。一般の spin$^c$-構造 $\mathcal{L}$ に対しては、複素直線束 $E$ が対応し、

$$S^+_{\mathcal{L}} \cong \Lambda^{0,0}(M) \otimes E \oplus \Lambda^{0,2}(M) \otimes E, \quad S^-_{\mathcal{L}} \cong \Lambda^{0,1}(M) \otimes E$$

となる。

$\phi \in \Gamma(S^+_{\mathcal{L}})$ は $\varphi_0 \in \Lambda^{0,0}(M) \otimes E$, $\varphi_2 \in \Lambda^{0,2}(M) \otimes E$ の対として表される。また、上の $S^+_{\mathcal{L}}$ の分解について

$$\sigma(\phi, \phi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(|\varphi_0|^2 - |\varphi_2|^2) & \varphi_0 \varphi_2^* \\ \varphi_0^* \varphi_2 & -\frac{1}{2}(|\varphi_0|^2 - |\varphi_2|^2) \end{bmatrix}$$

となる。今の場合、$L \underset{C^\infty}{\cong} K_M^{-1} \otimes E^2$ なので、$K_M^{-1}$ に Levi-Civita 接続から決まる接続 $A_0$ をとることで、$L$ の接続の代りに $E$ の接続をとっても同等である事が判る。このことから、(SW) は

$$\begin{cases} \bar\partial_A \varphi_0 + \bar\partial_A^* \varphi_2 = 0 & ① \\ 2F_A^{0,2} = \varphi_0^* \varphi_2 & ② \\ -i\langle F_{A_0}+2F_A, \omega\rangle = \frac{1}{2}(|\varphi_0|^2 - |\varphi_2|^2) & ③ \end{cases}$$

となる。（但．$A$ は $E$ の接続で $\bar\partial_A$ は共変微分の $(0,1)$-part,…）

① に $\bar\partial_A$ を施すと．$\bar\partial_A^2 = F_A^{0,2}$ となる事から．

$$F_A^{0,2}\varphi_0 + \bar\partial_A \bar\partial_A^* \varphi_2 = 0$$

を得る．ここに ② を代入し．左辺と $\varphi_2$ との $L^2$-内積をとると

$$\int_M |\varphi_0|^2|\varphi_2|^2 + |\bar\partial_A^*\varphi_2|^2 = 0$$

となる．

よって．$\varphi_0\varphi_2 = 0$，$\bar\partial_A^*\varphi_2 = 0$ を得る．前者と②から $F_A^{0,2} = 0$ となり．接続 $A$ は $L$ に正則構造を与える．$\bar\partial_A^*\varphi_2 = 0$ を得たのと同様に $\bar\partial_A\varphi_0 = 0$ も得られる。

まとめると、$A$ は $E$ に正則直線束の構造を与え．これを $\mathcal{E}_A$ と書くと、$\varphi_0 \in H^0(\mathcal{E}_A)$，$\varphi_2 \in H^2(\mathcal{E}_A)$ となる。一方 $\varphi_0\varphi_2 = 0$ であったので，"一致の定理" と合せて $\varphi_0 \equiv 0$ 又は $\varphi_2 \equiv 0$ となる事が判る．ここで ③ の両辺を $M$ 上で積分すると．

$$\int_M c_1(K_M^{-1}\otimes E^2)\wedge\omega = -\frac{1}{4\pi}\int(|\varphi_0|^2 - |\varphi_2|^2)\,\omega\wedge\omega$$

となることに気をつけると、

$$(\#)\begin{cases} \int_M c_1(K_M^{-1}\otimes E^2)\wedge\omega < 0 \Rightarrow \varphi_2 \equiv 0 \\ \int_M c_1(K_M^{-1}\otimes E^2)\wedge\omega = 0 \Rightarrow \varphi_0 \equiv 0,\ \varphi_2 \equiv 0 \\ \int_M c_1(K_M^{-1}\otimes E^2)\wedge\omega > 0 \Rightarrow \varphi_0 \equiv 0 \end{cases}$$

となる事が判った、即．(SW) の解であれば $\int_M c_1(K_M^{-1}\otimes E^2)\wedge\omega$ の符号によって，$E$ 上の正則構造 $\mathcal{E}_A$ と．$H^0(\mathcal{E}_A)$ の元もしくは $H^2(\mathcal{E}_A)$ の元の対が得られた。この逆はどうであろうか。

$\int_M c_1(K_M^{-1}\otimes E^2)\wedge\omega < 0$ の時を考える。$\varphi_0 \in H^0(\mathcal{E}_A)$ をとる．ここで．前出の $\mathcal{G}$ の"複素化"を考え．この作用で $(A,\varphi_0)$ を動かしてみる．特に $f: M \to \mathbb{C}$ に対し．$\exp(f): M \to \mathbb{C}^*$

を考え．これの $(A, \varphi_0)$ についての作用は

$$(A, \varphi_0) \xmapsto{e^f} (A + \partial f - \bar\partial f,\ e^f \cdot \varphi_0)$$

である．これより．$F_{e^f(A)} = F_A - 2\,\partial\bar\partial f$ であり．方程式③は

$$-\sqrt{-1}\,\Delta f + (2 < F_A, \omega > + < F_{A_0}, \omega >) = \frac{\sqrt{-1}}{2} e^{2f} |\varphi_0|^2$$

と書かれる。これは曲面上の Gauss 曲率としてどの様な関数が現れ得るかという問題を Kazdan-Warner が扱ったときの方程式の形をしている．

<u>定理</u>　$\Delta f - k = -e^{2f} h$ は、$h \geqq 0,\ \neq 0$，$\int_M k > 0$ の条件の下では解 $f$ を持ち．また一意である。

この定理を使うためには $h, k$ についての条件を調べる必要があるが．前者は $\varphi_0 \neq 0$ にとると満たされ．後者も $\int_M c_1(K^{-1} \otimes E^2) \wedge \omega < 0$ なる仮定より満たされている．従って $E$ 上の正則構造 $\mathcal{E}_A$ と $\varphi_0 \in H^0(\mathcal{E}_A)$ $(\varphi_0 \neq 0)$ に対し．$(SW)$ の解が構成できた．

従って，$M$ 上の Kähler 計量 $g$ に対し．

$\int_M c_1(K^{-1} \otimes E^2) \wedge \omega < 0$ の時．

$$\mathcal{M}(\mathcal{L}, g) \xleftrightarrow{1:1} \{c_1(E) \text{ の Poincaré 双対を実現する effective divisor}\}$$

同様に．

$\int_M c_1(K^{-1} \otimes E^2) \wedge \omega > 0$ の時．

$$\mathcal{M}(\mathcal{L}, g) \xleftrightarrow{1:1} \{c_1(K) - c_1(E) \text{ の Poincaré 双対を実現する effective divisor}\}$$

となる。

さて、上の $g$ は．一般の位置にあるとはいえない．即 §2 で書いた様な議論が $\mathcal{M}(\mathcal{L}, g)$ に対してはそのまま使える訳ではない。そこで．$\mathcal{M}(\mathcal{L}, g)$ 上に "obstruction bundle" を作り．これの切断の零点集合をみる事で Seiberg-Witten 不変量の計算をする．（論文という形で書かれているかどうか知らないが．以下の議論は、Kronheimer-Mrowka に依るものと思う．）

上で見た 1 対 1 対応は．単に集合としてのものであったが．更に"(退化した)接空間"まで込めての同一視であることが示される。

方程式(SW)を、Banach束の切断と見る事から始める。

$$\mathcal{V} := [(\Gamma(S^+)\setminus\{0\}) \times \mathcal{A}(L) \times \{\Gamma(\mathrm{Hermend}^0(S^+)) \oplus \Gamma(S^-)\}]/\mathcal{G}$$
$$\downarrow$$
$$\mathcal{C} := [(\Gamma(S^+)\setminus\{0\}) \times \mathcal{A}(L)]/\mathcal{G}$$

ここで、$\mathrm{Hermend}^0(S^+)$ は、$S^+$ の各fibreでのtraceless hermitian endomorphism全体の成す $M$ 上のvector束を表す。(SW)は上の $\mathcal{V} \to \mathcal{C}$ のFredholm cross sectionとみる事ができる。もしこのsection $s$ がzero sectionに横断的であれば、$\mathcal{M} = \mathrm{Zero}(s)$ は多様体となり次元も $d_L$ に一致する訳だが、一般に横断性は満たされるとは限らない。その時は、摂動項 $\mathcal{C} \to \mathcal{V}$ を加えて、zero sectionと横断的にする事ができる。例えば、section $s$ の線型化 $ds$ が全射でないが、$\mathrm{Coker}(ds)$ が $\mathrm{Zero}(s)$ 上一定次元で、有限次元vector束となる場合を考えよう。このとき、$\mathcal{V}$ の $\mathrm{Zero}(s)$ 上への制限を

$$\mathcal{V}|_{\mathrm{Zero}(s)} = \mathrm{Coker}(ds) \oplus \mathcal{W}$$

とvector束として分解する。摂動項は $\mathcal{C} \to \mathrm{Coker}(ds)$ と取ることで次を得る。

<u>命題</u> $\mathrm{Coker}(ds) \to \mathrm{Zero}(s)$ の、一般の位置にあるsectionの零点集合は、(SW)の摂動した方程式の解空間とcobordantである。
また、これを用いて、Seiberg-Witten不変量は計算される。

そこで、$\mathrm{Coker}(ds) \to \mathrm{Zero}(s)$ のEuler類を知る必要がある。
実は、次の完全系列がある。 $(\mathcal{E}_A, (\varphi_0, 0)) \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} & 0 \to H^0(M,\mathcal{O}) \xrightarrow{\varphi_0 \times} H^0(M,\mathcal{E}_A) \to \mathrm{Ker}\, ds \\ (\#) \quad & \to H^1(M,\mathcal{O}) \xrightarrow{\varphi_0 \times} H^1(M,\mathcal{E}_A) \to \mathrm{Coker}\, ds \\ & \to H^2(M,\mathcal{O}) \xrightarrow{\varphi_0 \times} H^2(M,\mathcal{E}_A) \to 0 \end{aligned}$$

これと、$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{\varphi_0} \mathcal{E}_A \to \mathcal{E}_A|_{\varphi_0^{-1}(0)} \to 0$ の導く完全系列との間には(準)同型があり、$\mathrm{Ker}\, ds$, $\mathrm{Coker}\, ds$ はそれぞれ $H^0(D, \nu_D)$, $H^1(D, \nu_D)$ ($D = \varphi_0^{-1}(0)$, $\nu_D$ : $D$ の"normal bundle")と同型となる。(上の完全系列を示すには、楕円型線型微分方程式を解くといった

解析的議論が必要となる．詳細は省略する）　たとえば．$b_1(M)=0$ とすると．$H^1(M,\mathcal{O})=0$ で，また複素直線束 $E$ 上の正則構造は，ゲージ変換を除いて一意的なので，$\mathcal{M}=\mathrm{Zero}(s)$ は，$H^0(M,\mathcal{E})$ の射影化 $\mathbb{P}(H^0(M,\mathcal{E}))$ となる。(#) は $\mathcal{M}$ の各点毎に成り立っているので，$\mathcal{M}$ 上の vector 束の完全系列を得る．$\mathbb{P}(H^0(M,\mathcal{E}))$ 上の超平面切断束を $H$ とすると，

$$0\to H\otimes H^1(M,\mathcal{E})\longrightarrow \mathrm{Coker}(ds)\to \underbrace{H^2(M,\mathcal{O})}_{\text{自明束}}\to H\otimes H^2(M,\mathcal{E})\to 0$$

となるので，$\mathrm{Coker}(ds)$ の全 Chern 類は，$(1+c_1(H))^{h_1(\mathcal{E})-h_2(\mathcal{E})}$ で与えられる。ここで，$h_j(\mathcal{E})=\dim H^j(M,\mathcal{E})$．
また，$\dim\mathbb{P}(H^0(M,\mathcal{E}))=2(h_0(\mathcal{E})-1)$ である．このことから次を得る．

命題１　$\mathcal{L}$ を $M$ 上の $\mathrm{spin}^c$ 構造で，$d_{\mathcal{L}}=0$ なるものとする．

$$\begin{cases} SW(\mathcal{L})=0 & (h_0(\mathcal{E})=0 \text{ 又は } h_0(\mathcal{E})-1>h_1(\mathcal{E})-h_2(\mathcal{E})\geq 0) \\ SW(\mathcal{L})=(-1)^{h_0(\mathcal{E})-1}\dbinom{\chi(\mathcal{E})-2}{h_0(\mathcal{E})-1} & (h_1(\mathcal{E})-h_2(\mathcal{E})<0 \text{ の時}) \\ SW(\mathcal{L})=\dbinom{h_1(\mathcal{E})-h_2(\mathcal{E})}{h_0(\mathcal{E})-1} & (h_1(\mathcal{E})-h_2(\mathcal{E})\geq h_0(\mathcal{E})-1\geq 0 \text{ の時}) \end{cases}$$

例　$\mathbb{C}P^2$ の９点 blow-up を $\mathbb{C}P^1$ 上の elliptic surface とみて，この $n+1$ 個の copy の fibre に沿う和を $V(n)$ と書く．一般 fibre を $F$ と書き，$E=g\cdot F$ なる複素直線束とし，$\mathcal{L}$ を $S^{\pm}_{\mathcal{L}}\cong S^{\pm}_{\mathrm{can}}\otimes E$ なる $\mathrm{spin}^c$ 構造とする．（$p_g(V(n))=n$ であり，$p_g\geq 1$ の時を考える．）
すると

$$SW(\mathcal{L})=\begin{cases}(-1)^g\dbinom{p_g-1}{g} & 0\leq g\leq p_g-1\\ 0 & g:\text{上以外}\end{cases}$$

３ページ前の (#) に戻る。$\mathcal{L}$ が Seiberg-Witten 類とする。
$\deg_\omega L=\int_M c_1(L)\wedge\omega$ で決めると，$L=K^{-1}\otimes E^2$ であったから，$\deg_\omega L<0$ であれば，$E$ が零でない正則切断をもつことから，$\deg_\omega E\geq 0$ 従って $\deg_\omega K+\deg_\omega L\geq 0$ となる．同様に $\deg_\omega L>0$ であれば $\deg_\omega K-\deg_\omega L\geq 0$ となる．これらの事から．

Seiberg-Witten 類$\mathcal{L}$に同伴する$S^1$束$L$は、　（$b_2^+ \geqq 2$としていた）

$$0 \leqq |\deg_\omega L| \leqq \deg_\omega K$$

を満たす事が判る。又右の等号成立の時は、$L = K^{\pm 1}$である事も判る。

以上の事を踏まえて、Kähler曲面に対して判る事を述べる。$b_2^+ \geqq 2$（実際 $b_2^+ = 2p_g + 1$ なので $p_g \geqq 1$ 従って $b_2^+ \geqq 3$）とする。

① $L = K^{\pm 1}$ なる spin$^c$構造でSeiberg-Witten類となるもの（即、標準的spin$^c$-構造$\mathcal{L}_{can}$（このとき$L = K^{-1}$）及び$\mathcal{L}_{can} \otimes K$（このとき$L = K$））があり、Seiberg-Witten不変量は$\pm 1$.

㊟ 単に「$K^{\pm 1}$がSeiberg-Witten類である」と言われることもあるが、$H^2(M;\mathbb{Z})$に2-torsionがあるとき、$L$ではspin$^c$-構造が決まらない事に注意。

② $M$が一般型極小曲面であれば、Seiberg-Witten類は上の2つに限る。

(説明) $\mathcal{L}$がSeiberg-Witten類であるとする。まず$d_{\mathcal{L}} > 0$でないといけない。即、$c_1(L)^2 \geqq c_1(K)^2$，　(#)

この頁の一番上にある様に、$0 \leqq |\deg_\omega L| \leqq \deg_\omega K$であった。

今、仮定から、$c_1(K)$は、Kähler coneの閉包に属するので、

$$|c_1(L) \cdot c_1(K)| \leqq c_1(K)^2$$

を得る。(#)とHodge index theoremと合せて、$c_1(K)^2 = \pm c_1(L)^2$となるが、このとき$c_1(K) = \pm c_1(L)$でなくてはいけない。

③ $M$が極小楕円曲面のとき、$K^{\pm 1}$は、Seiberg-Witten類の中で、$|\deg_\omega L|$が最大となるもので、他のSeiberg-Witten類は、$K^{\pm 1}$の有理数$\in [-1, 1]$倍と書かれる。

(説明) $p_g \geqq 1$なので、正則2型式$\eta (\neq 0)$が存在する。$\eta$は、自己双対2型式なので、これをSeiberg-Witten方程式の摂動項として用いる事ができる。本節でのKähler曲面上でのSeiberg-Witten方程式についての考察を $2F_A^{0,2} = \varphi_0^* \varphi_2$ の代りに

$$2F_A^{0,2} = \varphi_0^* \varphi_2 + \bar{\eta} \quad \text{—— ②}'$$

に置き換えて実行すると、

$$\bar\partial_A \varphi_0 = 0, \quad \bar\partial_A^* \varphi_2 = 0, \quad F_A^{0,2} = 0$$

そして $\bar\eta = \varphi_0^* \varphi_2$ なる事が判る。つまり $\eta = \varphi_0 \varphi_2^*$ と $\varphi_0 \in \Gamma(\mathcal{E})$, $\varphi_2^* \in \Gamma(\mathcal{E}^{-1} \otimes K)$ の積に $\eta$ が書かれた。$\eta \neq 0$ なので、$\varphi_0$ の因子、$\varphi_2^*$ の因子に標準因子が分解する事が判った。極小楕円曲面の標準因子は、ファイバーの和の形をしていることから、その一部の定める直線束 $\mathcal{E}$ は $K$ の有理数倍である事が判る。このことと、$0 \leq |\deg_\omega L| \leq \deg_\omega K$ とを合せて ③ の主張を得る。(ここでの計算は Witten の指摘による)

④ 極小曲面でない時は、(−1)-curve(s) を含む。(−1)-curves をつぶす写像を $\pi : M \longrightarrow M'$ とし、$M'$ は極小曲面であるとしよう。$E_1, \cdots, E_\ell$ を (−1)-curves とすると、

「$M$ の Seiberg-Witten 類 $=$ $M'$ の Seiberg-Witten 類 $\pm[E_1] \pm \cdots \pm [E_\ell]$」

となる。この事は、Kähler 曲面でない時も、"blow-up formula" として知られている。

こうした事から、$K^{\pm 1}$ (の位相型)は、Kähler 曲面の $C^\infty$-構造で定まる事が判る。(大雑把には、極小曲面については、$K^{\pm 1}$ は "一番大きな" Seiberg-Witten 類と言える。) よく知られている様に、$p_g$, $q$ は、位相構造のみで決まってしまう。

一般型極小曲面では、$P_n(M) = \frac{n(n-1)}{2} K_M^2 + \chi(\mathcal{O}_M) \quad (n \geq 2)$ なので、多重種数が $C^\infty$-構造のみから読みとれる事が判る。楕円曲面では、特異ファイバーから多重種数が決まるが、Seiberg-Witten類から特異ファイバーが決定できる事からこの場合も、結局 $C^\infty$-構造から多重種数が決まる事となる。残る K3 曲面, Enriques 曲面, トーラス, は、位相から区別がつく。(超楕円曲面、射影平面、線織曲面は $b_2^+ = 1$ 即 $p_g = 0$ の場合なので、別の扱いをする) $b_2^+ = 1$ の時は、Seiberg-Witten 類は metric に依ると前に述べた。従って、扱いが異なる。これについては省略する [F-M] を参照されたい。

まとめると、多重種数 従って小平次元が $C^\infty$-不変量である事が判る。

§4. 4次元トポロジーへの応用について

4次元トポロジーについてもどんな応用があるのか簡単に触れる。昨年の今頃 Seiberg-Witten 理論の第一報を聞いた時、(SW) は "magic equation" で、これによりゲージ理論は簡単になったとのことであった。例えば、Donaldson に始まる SU(2) instanton の理論では、"bubbling off" という現象があり、compact 性が崩れる様子を調べる事が必要であった。(SW) では §2 で述べた様に、compact 性が保障されている。また構造群がアーベル群である事も扱いを容易にしている。閉有向4-多様体の交叉型式が定値であれば、それは標準的なものに限るという Donaldson の定理に始まる一連の定理の別証が容易に得られるとの噂だった。(純粋に二次型式の問題が残っていた様だがこれも Elkies により示されたとのこと) 数学者の論文としては [K-M] が最初のものであるかと思う。ここで、Kronheimer-Mrowka は $\mathbb{C}P^2$ の2次元ホモロジー類を与えた時、これを実現する埋込まれた曲面の種数の下限についての Thom の予想を解決した。(実際、この問題が動機となり、2人は、一連の仕事を進めた。そしてそれの Witten による解釈を経て、Seiberg-Witten へとつながっていく。) その後何人かの人が $\mathbb{C}P^2$ 以外の4-多様体での Thom 予想の一般化を扱った。

閉スピン4-多様体では $b_2/|\mathrm{Sign}| \geqq 11/8$ となるかという予想がある (11/8-予想: K3 曲面のとき等号成立)。古田幹雄氏は、Seiberg-Witten 方程式を用いて少し弱い不等式を示した。(詳しくは論文 [F] 又は古田氏に直接聞かれたい。) ここでは、今まで見てきた様に解空間を調べるのではなく、方程式そのもの(の有限次元近似)を見るという新しい視点が示されている。

最後に、シンプレクティック4多様体の Seiberg-Witten 理論について少し述べる。SU(2)-instanton の理論は、Kähler 曲面上では、安定ベクトル束の moduli の話と結びつき、不変量の計算も行なわれ、トポロジー的応用もあったが、symplectic 4-多様体については、筆者の知る限り具体的応用はなかった様である。今回の

Seiberg-Witten の場合は，Taubes により，Kähler の場合に類似した結果がいくつか得られている。(たとえば $K^{\pm 1}$ は Seiberg-Witten 類である。) その中でも著しいのは Seiberg-Witten 類に対し，symplectic に埋込まれた曲面が存在するという定理がある。これを基に 4次元の symplectic topology の進展があったが，これについては省略する。

非専門家による紹介文であり，内容に偏り，不完全な説明等があると思うが，お許し戴きたい。

## 参考文献


[F-M] R. Friedman - J. W. Morgan, *Algebraic surfaces and Seiberg - Witten invariants*, preprint

[F] M. Furuta, *Monopole equation and 11/8 conjecture*, preprint

[K-M] P. Kronheimer - T. Mrowka, *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Letters 1 (199 ), 797 - 808

[T1] C. H. Taubes, *The Seiberg - Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Letters 1 (1994), 809 - 822

[T2] ———, *More constraints on symplectic forms from Seiberg - Witten equations*, Math. Res. Letters 2 (1995) 9-14

[T3] ———, *The Seiberg - Witten and the Gromov invariants*, Math. Res. Letters 2 (1995) 221 - 238

[W] E. Witten, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Letters 1 (1994) 769 - 796